

2つの弾性体による点接触や線接触の応力解析には、H.Hertz によって理論解が導かれたヘルツ接触が用いられている<sup>(1)</sup>。ヘルツ接触理論では、①2つの物体は均質であること、②接触面は2つの物体の表面に比較して極めて微小であること、③接触面に作用する力は面に垂直であること、④比例限界を越えて荷重が加わらないことの4点が仮定されている。しかしこのヘルツ接触理論は、図1に示すように2つの曲面が静的に接触したときの応力であり、歯車のかみあいのように法線力と接線力が同時に作用する応力計算には用いることができない。

そこで、J.O.Smith らはヘルツ接触理論を用いて、法線力と接線力を考慮した内部応力分布を求めている<sup>(2)</sup>。本稿ではその応力計算式を示す。ちなみに J.O.Smith の文献<sup>(2)</sup>に記載の数式には記述ミスがあるので注意されたい。

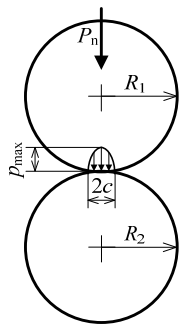


図1 二円筒の接触状態

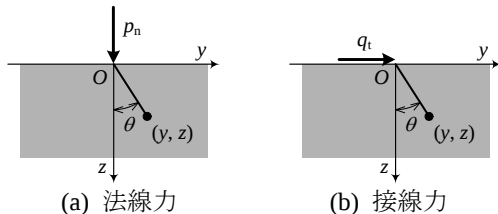


図2 半無限平板に作用する法線・接線方向の集中荷重

まず平面応力状態として考える。図2(a)と(b)は、それぞれ法線方向または接線方向の集中荷重が作用する半無限平板を示したものである。半無限平板の接線方向を  $y$  軸、深さ方向を  $z$  軸とする。弾性理論により、集中荷重の法線力  $p_n$  が図2(a)に示すように半無限平板に作用すると、内部応力分布は次式で与えられる。

$$\sigma_y = -\frac{2p_n}{\pi z} \sin^2 \theta \cos^2 \theta = -\frac{2p_n}{\pi} \frac{y^2 z}{(y^2 + z^2)^2} \quad \dots\dots\dots <1>$$

$$\sigma_z = -\frac{2p_n}{\pi z} \cos^4 \theta = -\frac{2p_n}{\pi} \frac{z^3}{(y^2 + z^2)^2} \quad \dots\dots\dots <2>$$

$$\tau_{yz} = -\frac{2p_n}{\pi z} \sin \theta \cos^3 \theta = -\frac{2p_n}{\pi} \frac{y z^2}{(y^2 + z^2)^2} \quad \dots\dots\dots <3>$$

ここで、 $\theta = \arcsin \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \arccos \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}$  である。

次に、集中荷重の接線力  $q_t$  が図2(b)に示すように半無限平板に作用すると、内部応力分布は次式で与えられる。

$$\sigma_y = -\frac{2q_t}{\pi z} \sin^3 \theta \cos \theta = -\frac{2q_t}{\pi} \frac{y^3}{(y^2 + z^2)^2} \quad \dots\dots\dots <4>$$

$$\sigma_z = -\frac{2q_t}{\pi z} \sin \theta \cos^3 \theta = -\frac{2q_t}{\pi} \frac{y z^2}{(y^2 + z^2)^2} \quad \dots\dots\dots <5>$$

$$\tau_{yz} = -\frac{2q_t}{\pi z} \sin^2 \theta \cos^2 \theta = -\frac{2q_t}{\pi} \frac{y^2 z}{(y^2 + z^2)^2} \quad \dots\dots\dots <6>$$

図3は、ヘルツの接触応力分布が半無限平板に作用したときの座標系と応力成分を示したものである。ヘルツ接触条件下において2つの円筒が接触する場合、ヘルツの最大接触応力  $p_{\max}$  は次式で表される。

$$p_{\max} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{P_n}{b} \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}} \quad \dots\dots\dots <7>$$

このとき、法線方向のヘルツ接触応力分布  $p(y)$  は、

$$p(y) = p_{\max} \sqrt{1 - \frac{y^2}{c^2}} \quad \dots\dots\dots <8>$$

で表されるような圧力分布である。ここで、ヘルツ接触幅を  $2c$  とすると、 $c$  は次式で表される。

$$c = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{P_n}{b} \frac{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}} \quad \dots\dots\dots <9>$$

また、接触面での摩擦係数を  $\mu$  とし、接線方向の圧力分布  $q(y)$  はクーロンの法則に従うとすると、

$$q(y) = \mu p(y) = \mu p_{\max} \sqrt{1 - \frac{y^2}{c^2}} \quad \dots\dots\dots <10>$$

で表される。最大接触応力  $q_{\max}$  は、 $y=0$  における接線力であるから、

$$q_{\max} = q(0) = \mu p_{\max} \quad \dots\dots\dots <11>$$

となる。

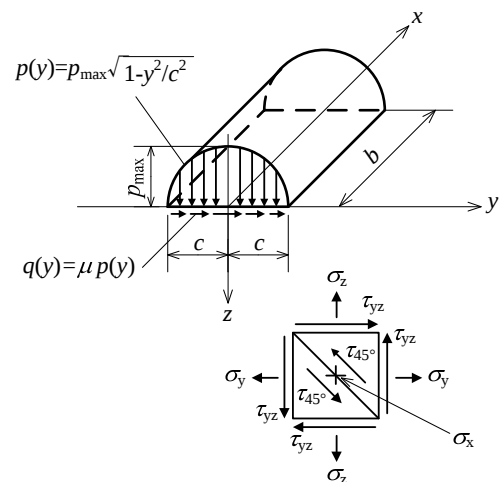


図3 ヘルツ接触条件下での座標軸と応力成分

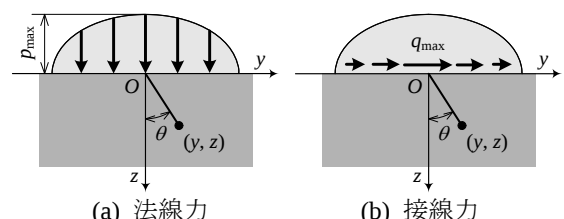


図4 半無限平板での法線力と接線力の楕円分布

図4(a)と(b)は、それぞれヘルツの接触条件下で法線力または接線力が作用する場合の半無限平板を示したものである。法線力が図4(a)に示すように楕円分布で半無限平板に作用する場合、内部応力分布は式<1>、式<2>、式<3>、式<8>、式<9>を用いると、次式で与えられる。

$$\sigma_{yn} = -\frac{1}{\pi} p_{\max} z \left\{ (c^2 + 2y^2 + 2z^2) \frac{1}{c} \bar{\Psi} - \frac{2\pi}{c} - 3yz\Psi \right\} \quad \cdots <12>$$

$$\sigma_{zn} = -\frac{1}{\pi} p_{\max} z (c\bar{\Psi} - y\Psi) \quad \cdots <13>$$

$$\tau_{yzn} = -\frac{1}{\pi} p_{\max} z^2 \Psi \quad \cdots <14>$$

また、接線力が図4(b)に示すように楕円分布で半無限平板に作用する場合、内部応力分布は式<4>、式<5>、式<6>、式<9>、式<10>を用いると、次式で与えられる。

$$\sigma_{yt} = -\frac{1}{\pi} \mu p_{\max} \left\{ (2y^2 - 2c^2 - 3z^2) \Psi + \frac{2\pi y}{c} + 2(c^2 - y^2 - z^2) \frac{y}{c} \bar{\Psi} \right\} \quad \cdots <15>$$

$$\sigma_{zt} = -\frac{1}{\pi} \mu p_{\max} z^2 \Psi \quad \cdots <16>$$

$$\tau_{yzt} = -\frac{1}{\pi} \mu p_{\max} \left\{ (c^2 + 2y^2 + 2z^2) \frac{z}{c} \bar{\Psi} - \frac{2\pi z}{c} - 3yz\Psi \right\} \quad \cdots <17>$$

ここで、 $\Psi$ と $\bar{\Psi}$ は、次式で定義されている。

$$\Psi = \frac{\pi}{K_1} \frac{1 - \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}}{\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \sqrt{2\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} + \left( \frac{K_1 + K_2 - 4c^2}{K_1} \right)}} \quad \cdots <18>$$

$$\bar{\Psi} = \frac{\pi}{K_1} \frac{1 + \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}}{\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \sqrt{2\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} + \left( \frac{K_1 + K_2 - 4c^2}{K_1} \right)}} \quad \cdots <19>$$

$$K_1 = (c+y)^2 + z^2 \quad \cdots <20>$$

$$K_2 = (c-y)^2 + z^2 \quad \cdots <21>$$

以上では平面応力状態における応力が求められた。これに対して平面ひずみの場合では2つの応力成分 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$ は平面応力の場合と同じであるが、図3に示すように半無限平板の幅方向をx方向とすると、x方向の応力成分 $\sigma_x$ は平面応力の場合のように0ではない。 $\sigma_x$ はポアソン比を $\nu$ とするとき

$$\sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z) \quad \cdots <22>$$

で与えられる。

したがって、法線力による応力分布を表す式<12>、式<13>、式<14>、そして接線力による応力分布を表す式<15>、式<16>、式<17>、さらに式<22>を用いて、重ね合わせの原理より摩擦力が働く場合のヘルツの接触応力条件下における内部応力分布は、次式で表される。

◆接触表面下 ( $z < 0$ ) の応力分布：

$$\sigma_x = -\frac{2\nu}{\pi} p_{\max} \left\{ \left[ (c^2 + y^2 + z^2) \frac{z}{c} \bar{\Psi} - \frac{\pi z}{c} - 2yz\Psi \right] + \mu \left\{ (y^2 - c^2 - z^2) \Psi + \frac{\pi y}{c} + (c^2 - y^2 - z^2) \frac{y}{c} \bar{\Psi} \right\} \right\}$$

.....<23>

$$\sigma_y = -\frac{1}{\pi} p_{\max} \left\{ \left[ (c^2 + 2y^2 + 2z^2) \frac{z}{c} \bar{\Psi} - \frac{2\pi z}{c} - 3yz\Psi \right] + \mu \left\{ (2y^2 - 2c^2 - 3z^2) \Psi + \frac{2\pi y}{c} + 2(c^2 - y^2 - z^2) \frac{y}{c} \bar{\Psi} \right\} \right\} \quad \cdots <24>$$

$$\sigma_z = -\frac{1}{\pi} p_{\max} z (c\bar{\Psi} - y\Psi + \mu z\Psi) \quad \cdots <25>$$

$$\tau_{yz} = -\frac{1}{\pi} p_{\max} \left\{ z^2 \Psi + \mu \left\{ (c^2 + 2y^2 + 2z^2) \frac{z}{c} \bar{\Psi} - \frac{2\pi z}{c} - 3yz\Psi \right\} \right\} \quad \cdots <26>$$

◆接触表面上 ( $z=0$ ) の応力分布：

$$\sigma_x = \begin{cases} -2\nu \mu p_{\max} \left( \frac{y}{c} - \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1} \right) & (y \geq c) \\ -2\nu p_{\max} \left( \sqrt{1 - \frac{y^2}{c^2}} + \mu \frac{y}{c} \right) & (|y| \leq c) \\ -2\nu \mu p_{\max} \left( \frac{y}{c} + \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1} \right) & (y \leq -c) \end{cases} \quad \cdots <27>$$

$$\sigma_y = \begin{cases} -2\mu p_{\max} \left( \frac{y}{c} - \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1} \right) & (y \geq c) \\ -p_{\max} \left( \sqrt{1 - \frac{y^2}{c^2}} + 2\mu \frac{y}{c} \right) & (|y| \leq c) \\ -2\mu p_{\max} \left( \frac{y}{c} + \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1} \right) & (y \leq -c) \end{cases} \quad \cdots <28>$$

$$\sigma_z = \begin{cases} -p_{\max} \sqrt{1 - \frac{y^2}{c^2}} & (|y| \leq c) \\ 0 & (y \geq c, y \leq -c) \end{cases} \quad \cdots <29>$$

$$\tau_{yz} = \begin{cases} -\mu p_{\max} \sqrt{1 - \frac{y^2}{c^2}} & (|y| \leq c) \\ 0 & (y \geq c, y \leq -c) \end{cases} \quad \cdots <30>$$

本稿では、2つの円筒が接触する場合のヘルツ接触理論について述べたが、H.Hertz やその他の研究者によって導出された球同士の接触や任意の曲面同士の接触に関する近似式<sup>(3),(4)</sup>などもあるので、詳細は下記の参考文献やトライボロジーに関する書籍<sup>(5)</sup>を参考にして頂ければ幸いです。

## 参考文献

- (1) 仙波正荘, 歯車 第3巻, 日刊工業新聞社(1956)p.748.
- (2) J.O.Smith and C.K.Liu, "Stresses Due to Tangential and Normal Loads on an Elastic Solid With Application to Some Contact Stress Problems", *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, Vol.20, No.2, (1953), p.157-166.
- (3) D.E.Brewe and B.J.Hamrock, "Simplified Solution for Elliptical-Contact Deformation between Two Elastic Solids", *Trans. ASME. Ser.F*, Vol.99, No.4, (1977) p.485-487.
- (4) B.J.Hamrock and D.Dowson, "Ball Bearing Lubrication", John Wiley and Sons, Inc. (1981) p.75.
- (5) 山本雄二・兼田楨宏, トライボロジー, 理工学社(1998).