

2つの弾性体による点接触や線接触の応力解析には、H.Hertzによって理論解が導かれたヘルツ接触が用いられている⁽¹⁾。ヘルツ接触理論では、①2つの物体は均質であること、②接触面は2つの物体の表面に比較して極めて微小であること、③接触面に作用する力は面に垂直であること、④比例限界を越えて荷重が加わらないことの4点が仮定されている。しかしこのヘルツ接触理論は、図1に示すように2つの曲面が静的に接触したときの応力であり、歯車のかみあいのように法線力と接線力が同時に作用する応力計算には用いることができない。

そこで、G.H.Hamiltonはヘルツ接触理論を用い、点接触条件下において法線力と接線力を考慮した内部応力分布を求めている⁽²⁾。本稿ではその応力計算式を示す。

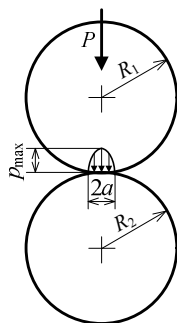


図1 二球の接触状態

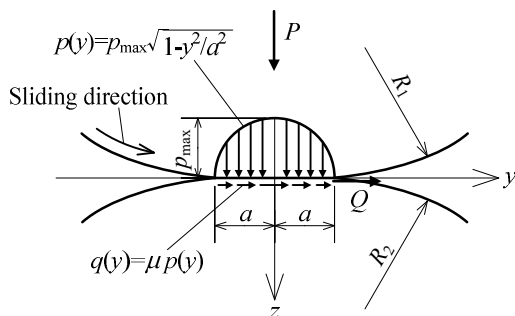
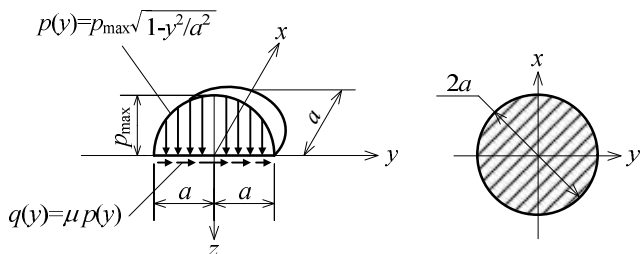


図2 ヘルツ接触下での座標系と応力分布



(a) ヘルツ接触 (b) 真上から見た点接触
図3 点接触の場合のヘルツ接触下での座標系

図2と図3は、ヘルツの接触応力分布が点接触条件下で作用したときの座標系を示したものである。なお、この座標系は著者が定義したものであり、G.H.Hamiltonが定義したものとは異なるので、G.H.Hamiltonが示した計算式と本稿の計算式が異なることに注意して頂きたい。ヘルツ接触条件下において点接触する場合、ヘルツの最大接触応力

$p_{\max}$ は次式で表される。

$$p_{\max} = \frac{3P}{2\pi a^2} = \frac{3P}{2\pi} \left\{ \frac{4 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}{3P \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)} \right\}^{\frac{2}{3}} \dots\dots\dots<1>$$

ここで、 P は法線力、 a は接触円半径を表す。

また、法線方向のヘルツ接触応力分布 $p(y)$ は、

$$p(y) = p_{\max} \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}} \dots\dots\dots<2>$$

で表される。なお、接触円半径 a は次式で表される。

$$a = \sqrt[3]{\frac{3PR}{2E}} = \sqrt[3]{\frac{3P}{4} \frac{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}} \dots\dots\dots<3>$$

ここで、 R は等価曲率半径、 E は等価縦弾性係数と呼ばれ、次式で定義される。

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \dots\dots\dots<4>$$

$$\frac{2}{E} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \dots\dots\dots<5>$$

また、平均接触圧力 p_{mean} は、

$$p_{\text{mean}} = \frac{P}{\pi a^2} = \frac{2}{3} p_{\max} \dots\dots\dots<6>$$

で表され、接触中心の変形量 δ は、

$$\delta = a^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \dots\dots\dots<7>$$

で表される。

接触面での摩擦係数を μ とすると、二球間に働く接線力 Q は次式で定義される。

$$Q = \mu P \dots\dots\dots<8>$$

さらに、接線方向の圧力分布 $q(y)$ はクーロンの法則に従うとすると、

$$q(y) = \mu p(y) = \mu p_{\max} \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}} \dots\dots\dots<9>$$

で表される。最大接触応力 $q_{\max}$ は、 $y=0$ における接線力であるから、

$$q_{\max} = q(0) = \mu p_{\max} \dots\dots\dots<10>$$

となる。

次に G.H.Hamilton が求めた点接触下の応力分布の計算式を以下に示す。

(1) 法線力 P のみが作用する場合

◆点接触表面下の原点以外 ($x \neq 0$ or $y \neq 0, z > 0$)での応力分布：

$$\sigma_{xx} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[(1+\nu)z\phi + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{y^2 - x^2}{r^2} \times \left[(1-\nu)Nz^2 - \frac{1-2\nu}{3} (NS + 2AN + a^3) - \nu Mza \right] - N(x^2 + 2\nu y^2) - \frac{Mx^2 za}{S} \right\} \right] \dots\dots\dots<11>$$

$$\sigma_{yn} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[(1+\nu)z\phi + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{x^2 - y^2}{r^2} \right. \right. \\ \times \left[(1-\nu)Nz^2 - \frac{1-2\nu}{3} (NS + 2AN + a^3) - \nu Mza \right] \\ \left. \left. - N(y^2 + 2\nu x^2) - \frac{My^2 za}{S} \right\} \right] \dots\dots\dots <12>$$

$$\sigma_{zn} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[-N + \frac{azM}{S} \right] \dots\dots\dots <13>$$

$$\tau_{xyn} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[\frac{xy(1-2\nu)}{r^4} \left\{ -Nr^2 + \frac{2}{3}N(S+2A) - z(zN+aM) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3}a^3 \right\} + \frac{xyz}{r^4} \left\{ -\frac{aMr^2}{S} - zN + aM \right\} \right] \dots\dots\dots <14>$$

$$\tau_{yzn} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[-z \left\{ \frac{yN}{S} - \frac{yzH}{G^2 + H^2} \right\} \right] \dots\dots\dots <15>$$

$$\tau_{zxn} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[-z \left\{ \frac{xN}{S} - \frac{xzH}{G^2 + H^2} \right\} \right] \dots\dots\dots <16>$$

ここで、式中の各変数は次式で定義される。

$$r^2 = x^2 + y^2 \dots\dots\dots <17>$$

$$A = r^2 + z^2 - a^2 \dots\dots\dots <18>$$

$$S = (A^2 + 4a^2 z^2)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots <19>$$

$$M = \left(\frac{S+A}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots <20>$$

$$N = \left(\frac{S-A}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots <21>$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{a}{M} \right) \dots\dots\dots <22>$$

$$G = M^2 - N^2 + zM - aN \dots\dots\dots <23>$$

$$H = 2MN + aM + zN \dots\dots\dots <24>$$

◆点接触表面下の原点 ($x=0, y=0, z>0$) での応力分布：

$$\sigma_{xn} = \sigma_{yn} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[(1+\nu) \left\{ z \tan^{-1} \left(\frac{a}{z} \right) - a \right\} + \frac{a^3}{2(a^2 + z^2)} \right] \dots\dots\dots <25>$$

$$\sigma_{zn} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[\frac{-a^3}{a^2 + z^2} \right] \dots\dots\dots <26>$$

$$\tau_{xyn} = \tau_{yzn} = \tau_{zxn} = 0 \dots\dots\dots <27>$$

◆点接触表面上の接触円外 ($r>a, z=0$) での応力分布：

$$\sigma_{xn} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[\frac{(1-2\nu)(x^2 - y^2)a^3}{3r^4} \right] \dots\dots\dots <28>$$

$$\sigma_{yn} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[\frac{(1-2\nu)(y^2 - x^2)a^3}{3r^4} \right] \dots\dots\dots <29>$$

$$\tau_{xyn} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[\frac{2a^3 xy(1-2\nu)}{3r^4} \right] \dots\dots\dots <30>$$

$$\sigma_{zn} = \tau_{yzn} = \tau_{zxn} = 0 \dots\dots\dots <31>$$

◆点接触表面上の接触円内 ($r \leq a, z=0$) での応力分布：

$$\sigma_{xn} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{y^2 - x^2}{r^2} \left[\frac{1-2\nu}{3} \left\{ (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right\} \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - (x^2 + 2\nu y^2)(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \right\} \right] \dots\dots\dots <32>$$

$$\sigma_{yn} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{x^2 - y^2}{r^2} \left[\frac{1-2\nu}{3} \left\{ (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right\} \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - (y^2 + 2\nu x^2)(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \right\} \right] \dots\dots\dots <33>$$

$$\sigma_{zn} = \tau_{xyn} = \tau_{yzn} = \tau_{zxn} = 0 \dots\dots\dots <34>$$

(2) 接線力 Q のみが作用する場合

◆点接触表面下の原点以外 ($x \neq 0$ or $y \neq 0, z>0$) での応力分布：

$$\sigma_{xt} = \frac{3Q}{2\pi a^3} \left[-\frac{3\nu y\phi}{4} + \frac{ayM}{r^4} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) \right. \right. \\ \times \left[\nu(S-2A+r^2) + z^2 \right] + \frac{x^2 z^2}{S} + \frac{3}{4}\nu r^2 \left. \right\} \\ + \frac{yzN}{r^4} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) \left[-\frac{S}{6}(1-2\nu) - \frac{A}{3}(1-2\nu) - \frac{1}{2}(z^2 + 3a^2) \right] \right. \\ \left. \left. + \frac{a^2 x^2}{S} - \frac{3}{4}\nu r^2 - \frac{r^2}{4} \right\} + \frac{4a^3 yz}{3r^4} \left(\frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) (1-2\nu) \right] \dots\dots <35>$$

$$\sigma_{yt} = \frac{3Q}{2\pi a^3} \left[-y \left(\frac{\nu}{4} + 1 \right) \phi + \frac{ayM}{r^4} \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) \right. \right. \\ \times \left[(S\nu - 2A\nu + z^2) + \frac{y^2 z^2}{3} + \frac{7\nu r^2}{4} - 2\nu y^2 + r^2 \right] \\ + \frac{yzN}{r^4} \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) \left[-\frac{S}{6}(1-2\nu) - \frac{A}{3}(1-2\nu) - \frac{1}{2}(z^2 + 3a^2) \right] \right. \\ \left. \left. + \frac{a^2 y^2}{S} - \frac{\nu r^2}{4} - \frac{7r^2}{4} \right\} + \frac{4a^3 yz}{3r^4} \left(\frac{3}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) (1-2\nu) \right] \dots\dots <36>$$

$$\sigma_{zt} = \frac{3Q}{2\pi a^3} \left[\frac{yzN}{2r^2} \left\{ 1 - \frac{r^2 + z^2 + a^2}{S} \right\} \right] \dots\dots\dots <37>$$

$$\tau_{xyt} = \frac{3Q}{2\pi a^3} \left[\frac{x}{2} \left(\frac{\nu}{2} - 1 \right) \phi + \frac{axM}{r^4} \left\{ \frac{y^2 z^2}{S} + \nu \left[(S-2A) \left(\frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2y^2 + \frac{r^2}{4} \right] + \frac{r^2}{2} + z^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) \right\} + \frac{zxN}{r^4} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) \right. \right. \\ \times \left[(2\nu - 1) \left(\frac{S}{6} + \frac{A}{3} \right) - \frac{z^2}{2} - \frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right] + \frac{r^2 \nu}{4} + \frac{a^2 y^2}{S} - \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} \right. \\ \left. \left. + \frac{4a^3 zx}{3r^4} \left(\frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) (1-2\nu) \right\} \right] \dots\dots\dots <38>$$

$$\tau_{yzt} = \frac{3Q}{2\pi a^3} \left[\frac{3z\phi}{2} + \frac{azM}{r^2} \left(1 + \frac{y^2}{r^2} - \frac{y^2}{S} \right) + \frac{N}{r^2} \left\{ -\frac{3}{4}(S+2A) \right. \right. \\ \left. \left. + z^2 - \frac{3a^2}{4} - \frac{r^2}{4} + \frac{z^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots <39>$$

$$\tau_{xzt} = \frac{3Q}{2\pi a^3} \frac{xyz}{2r^4} \left[aM \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{S} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{zN}{2} \left\{ -3 + \frac{1}{S}(5a^2 + z^2 + r^2) \right\} \right] \dots\dots\dots <40>$$

ここで、式中の各変数は前述の式<17>～式<22>で定義される。

◆点接触表面下の原点 ($x=0, y=0, z>0$) での応力分布：

$$\tau_{yzt} = \frac{3Q}{2\pi a^3} \left[-a + \frac{3}{2} z \tan^{-1} \left(\frac{a}{z} \right) - \frac{az^2}{2(a^2 + z^2)} \right] \dots\dots\dots <41>$$

$$\sigma_{xt} = \sigma_{yt} = \sigma_{zt} = \tau_{xyt} = \tau_{xzt} = 0 \quad \cdots \cdots <42>$$

◆点接触表面上の接触円外 ($r > a$, $z=0$) での応力分布:

$$\sigma_{xt} = \frac{3Q}{2\pi a^3} \left[-\frac{3\nu y \phi}{4} + \frac{ayM_0}{r^4} \left\{ \nu a^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) + \frac{3\nu r^2}{4} \right\} \right] \cdots <43>$$

$$\sigma_{yt} = \frac{3Q}{2\pi a^3} \left[-y \left(1 + \frac{\nu}{4} \right) \phi + \frac{ayM_0}{r^4} \left\{ -\nu M_0^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) + \frac{7\nu r^2}{4} - 2\nu y^2 + r^2 \right\} \right] \cdots <44>$$

$$\tau_{xyt} = \frac{3Q}{2\pi a^3} \left[\frac{x}{2} \left(\frac{\nu}{2} - 1 \right) \phi + \frac{axM_0}{r^4} \left\{ -\nu M_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) - 2\nu y^2 + \frac{\nu r^2}{4} + \frac{r^2}{2} \right\} \right] \cdots <45>$$

$$\sigma_{zt} = \tau_{yzt} = \tau_{xzt} = 0 \quad \cdots \cdots <46>$$

なお、式中の変数 M_0 は次式で定義される。

$$M_0 = (r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots \cdots <47>$$

◆点接触表面上の接触円内 ($r \leq a$, $z=0$) での応力分布:

$$\sigma_{xt} = \frac{3Q}{2\pi a^3} \left[-\frac{3\nu y}{8} \right] \cdots \cdots <48>$$

$$\sigma_{yt} = \frac{3Q}{2\pi a^3} \left[-\frac{\pi y}{2} \left(\frac{\nu}{4} + 1 \right) \right] \cdots \cdots <49>$$

$$\tau_{xyt} = \frac{3Q}{2\pi a^3} \left[\frac{\pi x}{4} \left(\frac{\nu}{2} - 1 \right) \right] \cdots \cdots <50>$$

$$\tau_{yzt} = \frac{3Q}{2\pi a^3} \left[-\left(a^2 - r^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdots \cdots <51>$$

$$\sigma_{zt} = \tau_{xzt} = 0 \quad \cdots \cdots <52>$$

(3) 法線力 P と接線力 Q が作用する場合

法線力による応力分布を表す式<11>～式<34>, そして接線力による応力分布を表す式<35>～式<52>を用いて, 重ね合わせの原理より摩擦力が働く場合のヘルツ接触理論を用いた点接触条件下における内部応力分布は, 次式で表される。

$$\sigma_x = \sigma_{xm} + \sigma_{xt} \quad \cdots \cdots <53>$$

$$\sigma_y = \sigma_{ym} + \sigma_{yt} \quad \cdots \cdots <54>$$

$$\sigma_z = \sigma_{zm} + \sigma_{zt} \quad \cdots \cdots <55>$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xym} + \tau_{xyt} \quad \cdots \cdots <56>$$

$$\tau_{yz} = \tau_{yzm} + \tau_{yzt} \quad \cdots \cdots <57>$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xzm} + \tau_{xzt} \quad \cdots \cdots <58>$$

なお, 各応力を表す式は, 下記の4つの場合で異なるため, 法線力と接線力が作用する点接触条件下における内部応力分布は, 4つの場合に分けて求める必要がある。

- ◆点接触表面下の原点以外 ($x \neq 0$ or $y \neq 0$, $z > 0$) の場合
- ◆点接触表面下の原点 ($x=0$, $y=0$, $z > 0$) の場合
- ◆点接触表面上の接触円外 ($r > a$, $z=0$) の場合
- ◆点接触表面上の接触円内 ($r \leq a$, $z=0$) の場合

Von Mises は1913年に偏差応力の二次の不変量が一定値に達すると降伏するという説を提案し, Nadai は八面体せん断応力が一定値になると降伏することと同じであることを指摘した。この条件式は Mises の降伏条件と呼ばれ, 主応力 σ_1 , σ_2 , σ_3 を用いると次式で表される⁽³⁾。

$$\sigma_{eq}^2 = \frac{1}{2} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} \geq Y^2 \quad \cdots \cdots <59>$$

ここで, σ_{eq} は Mises の相当応力であり, Y は単軸引っ張りの降伏応力である。つまり, 2次元や3次元応力状態では, σ_{eq} が Y を超えると降伏が起これと考える。

$$\sigma_{eq} \geq Y \quad \cdots \cdots <52>$$

したがって, Mises の相当応力 σ_{eq} は次式で表される。

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \}} \quad \cdots \cdots <60>$$

なお, σ_{eq} を応力成分で表すと,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \} + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad \cdots \cdots <61>$$

となる。

本稿では, 2つの球が点接触する場合のヘルツ接触理論について述べたが, H.Hertz やその他の研究者によって導出された任意の曲面同士の接触に関する近似式⁽⁴⁾, ⁽⁵⁾などもあるので, 詳細は下記の参考文献やトライボロジーに関する書籍⁽⁵⁾を参考にして頂ければ幸いである。

参考文献

- (1) 仙波正荘, 歯車 第3巻, 日刊工業新聞社 (1956) p.748.
- (2) G.M.Hamilton, "Explicit Equations for the Stresses beneath a Sliding Spherical Contact", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol.197, (1983), pp.53-59.
- (3) 大矢根守哉, 塑性加工学, 養賢堂 (1996) pp.145-146.
- (4) D.E.Brewe and B.J.Hamrock, "Simplified Solution for Elliptical-Contact Deformation between Two Elastic Solids", *Trans. ASME. Ser.F*, Vol.99, No.4, (1977) p.485-487.
- (5) B.J.Hamrock and D.Dowson, "Ball Bearing Lubrication", John Wiley and Sons, Inc. (1981) p.75.
- (6) 山本雄二・兼田楨宏, トライボロジー, 理工学社 (1998).